13/03/2017

Μάθημα 3ο ΠΡΟΣΟΧΗ!

Απει4

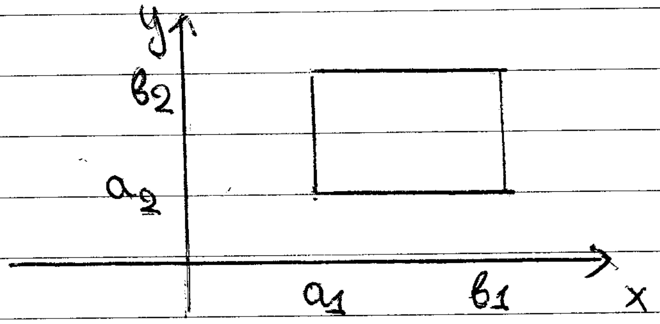
$U \subset \mathbb{R}^n$

<u>Στόχος</u>: Ορισμός <u>πολλαπλού ολοκληρώματος</u> μιας $f: U \to \mathbb{R}$

Προς το στόχο αυτό: Ορισμός πολλαπλού ολοκληρώματος για $U = A \subset \mathbb{R}^n$, όπου A κλειστό ορθογώνιο, δηλ (ορισμός):

$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ με $a_i < b_i$ $\forall i = 1, \dots, n$

<u>π.χ.</u> $n = 2$



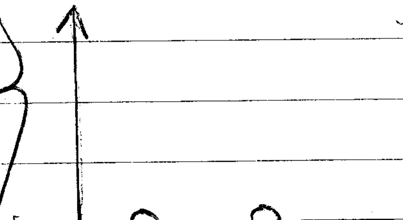
με <u>περιεχόμενο (ή όγκος)</u>: $V(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

<u>π.χ.</u> για $n=2$: $V(A)$ = εμβαδό του A

για $n=3$: $V(A)$ = όγκος του A

για $n=1$: $V(A)$ = μήκος του $A = [a_1, b_1] \subset \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: <u>ΟΛΑ</u> ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ III κ' IV ΕΞΑΡΤΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΣΤΑΣΗ



$\boxed{\bar{M} = [1,2] \times \{0\}}$

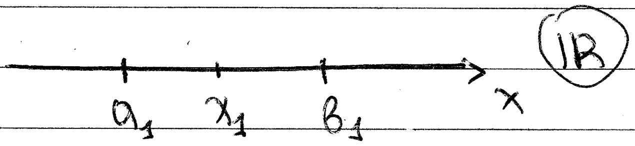
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2,\ y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

το κλειστό είναι αυτό και όχι μόνο $\bar{M} = [1,2]$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

017

για το $n=1$:



2 **Ορισμός:** Έστω $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$

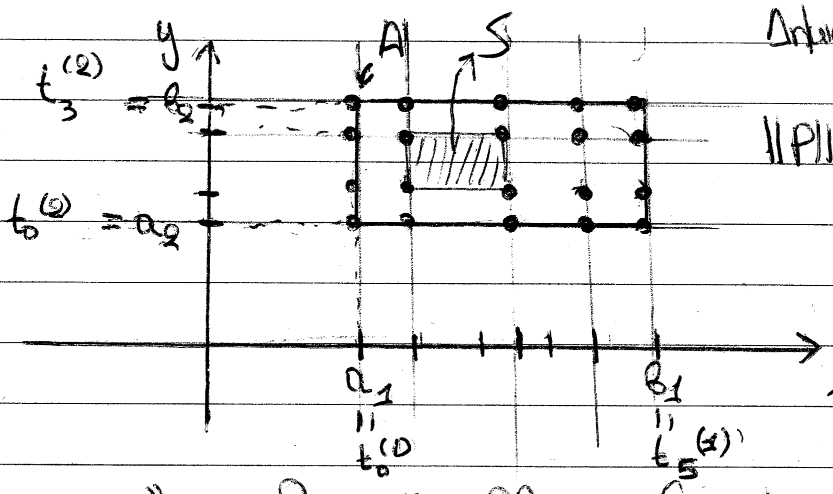
(α) P διαμέριση του A :

$$P = P_1 \times \dots \times P_n = \{t_0^{(1)}, \dots, t_{k_1}^{(1)}\} \times \dots \times \{t_0^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$$

όπου τα $P_i = \{t_0^{(i)}, \dots, t_{k_i}^{(i)}\} \subset [a_i, b_i]$ είναι διαμερίσεις των διαστημάτων $[a_i, b_i]$, δηλ.:

$$a_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{k_i}^{(i)} = b_i$$

πχ. $n=2$:



Δημιουργείται πλέγμα

$\|P\| = t_2^{(2)} - t_1^{(2)}$

(Δε μας ενδιαφέρουν $\underbrace{\text{"οι τελίτσες"}}_{\text{οι διαμερίσεις}}$ αλλά τα διαστήματα που προκύπτουν)

Ισχύει: $\{\bullet\} = P$ (το σύνολο με τις τελίτσες)

(β) Λεπτότητα της P : $\|P\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} \|P_i\|$

όπου $\|P_i\| = \max\limits_{k=1,\dots,k_i} \{t_k^{(i)} - t_{k-1}^{(i)}\}$

(Το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς από τα ορθογώνια που προκύπτουν)

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ

(γ) Συμβολίζουμε το <u>σύνολο των διαμερίσεων</u> του A

$\mathcal{P}(A) = \{ P \subset A \; : \; P$ διαμέριση του $A \}$

~~καρτεσιανό γινόμενο~~

(δ) Μια $P \in \mathcal{P}(A)$ διαμερίζει το A σε $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \in \mathbb{N}$ <u>κλειστά ορθογώνια</u>, S

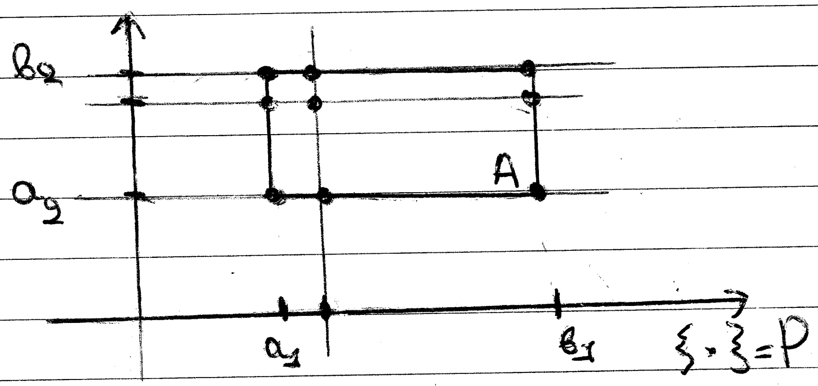
$$\left[\; S = [t^{(1)}_{j_1-1}, t^{(1)}_{j_1}] \times \ldots \times [t^{(n)}_{j_n-1}, t^{(n)}_{j_n}] \; \right]$$

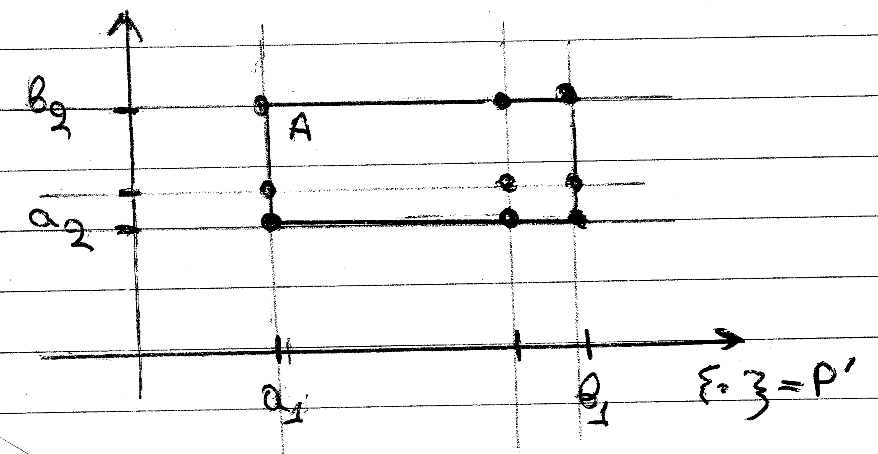
$$j_i = 1, \ldots, k_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

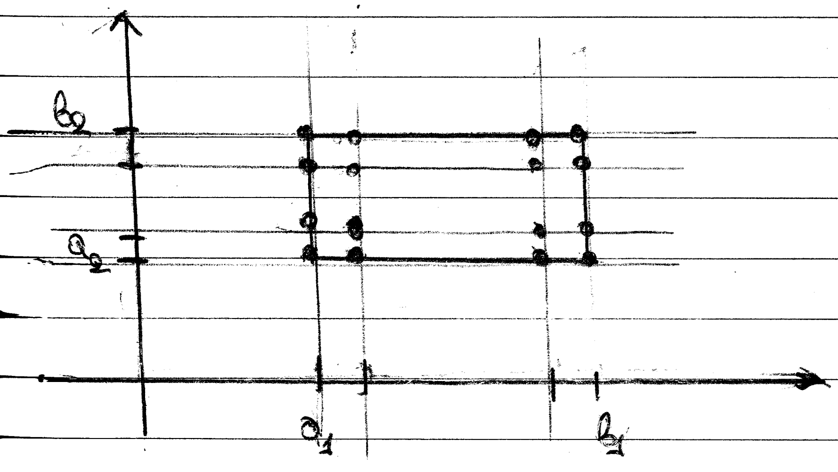
τα οποία S ονομάζονται <u>υποορθογώνια</u> της P και το σύνολο των S της P συμβολίζεται με $\mathcal{S}_P$

(ε) Μια $P' \in \mathcal{P}(A)$ λέγεται <u>εκλέπτυνση</u> της P αν $P' \supset P$

(στ) $P'' \in \mathcal{P}(A)$ <u>κοινή εκλέπτυνση</u> των $P, P' \in \mathcal{P}(A)$ αν $P'' \supset P, P'$







$\in \mathbb{N}$

$\{\cdot\} = P'' \supset P, P'$

κοινή εκλέπτυνση

Παρατηρήσεις

① Για τα ορθογώνια $S \in \mathcal{S}_P$ ισχύει:

$$S \subset A, \quad \bigcup_{S \in \mathcal{S}_P} S = A, \quad \sum_{S \in \mathcal{S}_P} V(S) = V(A),$$

$$\overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{S'} = \emptyset, \text{ αν } S \neq S' \in \mathcal{S}_P$$ (όλα τα εσωτερικά τους δεν τέμνονται)

$\overset{\circ}{S}$ → εσωτερικό του S

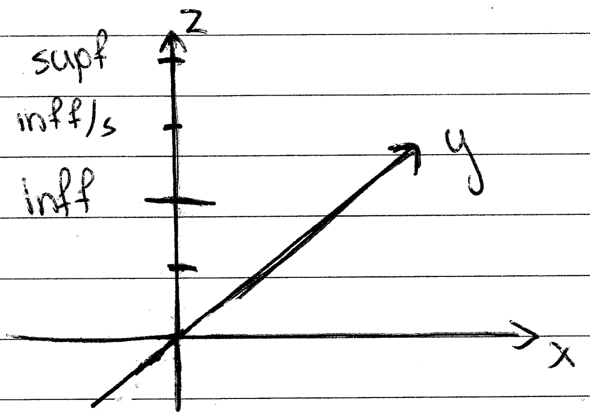
Ορισμός. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $P \in \mathcal{P}(A)$. Τότε ονομάζουμε:

$$L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \inf f|_S \cdot V(S)$$ κάτω άθροισμα και

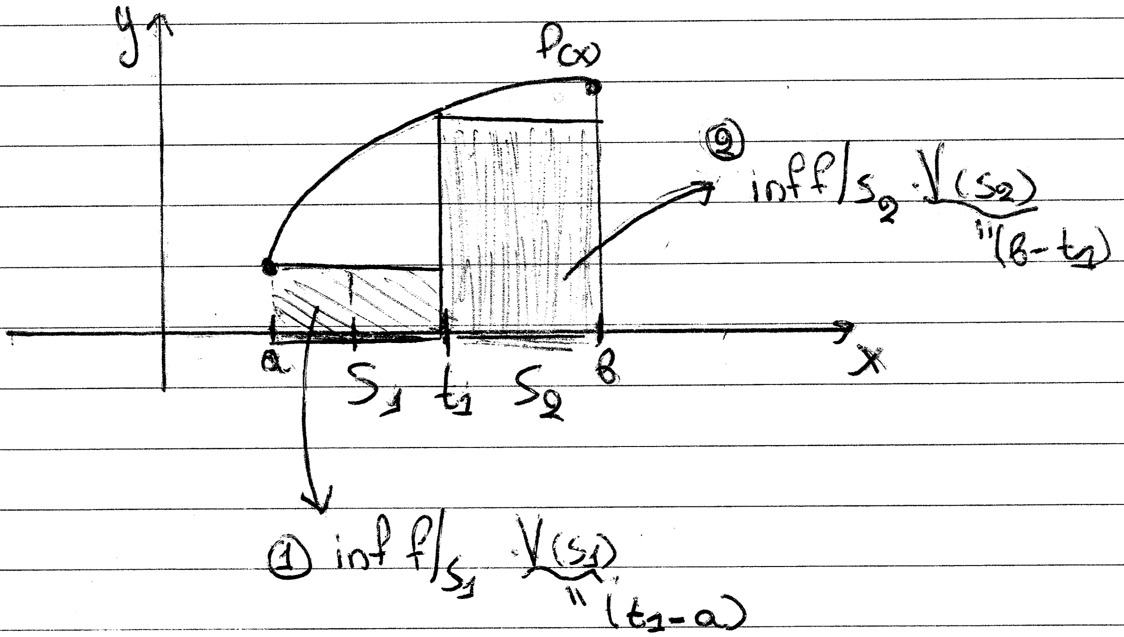
$$U(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \sup f|_S \cdot V(S)$$ άνω άθροισμα.

Υπενθύμιση: $\inf f := \inf \overbrace{\{ f(\bar{x}) : \bar{x} \in A \}}^{\in \mathbb{R}}$ για μια $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, ισχύει: ⓐ $\inf f|_S = \inf \{ f(\bar{x}) : \bar{x} \in S \} \geq \inf f > -\infty$, $S \subset A$

ⓑ $\inf f \leq \sup f$



n = 1



$① + ② = L(f,P)$

Πρόταση: Έστω A, f όπως στον προηγούμενο ορισμό. Τότε:

(α) $\forall P \in \mathcal{P}(A)$:

$$\underbrace{-\infty < \inf f \cdot V(A)}_{\text{φραγμένο άρα πραγμ. αριθμός άρα οκ!}} \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq \sup f \cdot A < +\infty$$

$f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $\forall \bar{x} \in A$: $c_1 \leq f(\bar{x}) \leq c_2 \ \forall \bar{x} \in A$

όπου $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\inf f \cdot V(A) = \sum_{S \in \xi_P} \underbrace{\inf f}_{\leq \inf f|_S} \cdot V(S)$$

, αντικαθιστώ, προσθέτω και έχω το $\leq L(f,P)$

$\forall P, P' \in \mathcal{P}(A)$ με $P' \supset P$:

$L(f,P) \leq L(f,P')$ και $U(f,P') \leq U(f,P)$

Απόδειξη

$S \in \mathfrak{S}_P$ $\exists$ $l_S \in \mathbb{N}$ υποορθογώνια $T_i^{(S)} \in \mathfrak{S}_{P'}$ της δεύτερης διαμέρισης P' έτσι ώστε :

$$S = \bigcup_{i=1}^{l_S} T_i^{(S)} \quad , \quad V(S) = \sum_{i=1}^{l_S} V(T_i^{(S)})$$

επίσης, $\inf f/S \leq \inf f/T_i^{(S)} \leq \sup f/T_i^{(S)} \leq \sup f/S$ $\quad \forall i = 1, \dots, l_S$

και $S_{P'} = \{ T_i^{(S)} \in \mathfrak{S}_{P'} \ , i = 1, \dots, l_S \ , S \in \mathfrak{S}_P \}$

$$\Rightarrow \overbrace{\sum_{S \in \mathfrak{S}_P} \inf f/S \cdot V(S)}^{=L(f,P)} = \sum_{i=1}^{l_S} \inf f/S \ V(T_i^{(S)})$$

$$\leq \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} \sum_{i=1}^{l_S} \inf f/T_i^{(S)} \ V(T_i^{(S)}) \quad = L(f,P')$$

$$\leq \sum_{S \in \mathfrak{S}_P} \sum_{i=1}^{l_S} \sup f/T_i^{(S)} \ V(T_i^{(S)}) \quad = U(f,P)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l_S} \sup f/S \cdot V(T_i^{(S)}) = \overbrace{\sum_{S \in \mathfrak{S}_P} \sup f/S \cdot V(S)}^{= U(f,P)}$$

$\forall P, P' \in \mathcal{P}(A) : L(f,P') \leq U(f,P)$

Απόδειξη.

Έστω $P'' \supset P, P'$ (κοινή εκλέπτυνση). Τότε από τα (β),(α) :

$$L(f,P') \underset{(\beta)}{\leq} L(f,P'') \underset{(\alpha)}{\leq} U(f,P'') \underset{(\beta)}{\leq} U(f,P)$$